Ασκ. 2.25) βιβλ. Ακριβη-Δουγαλη.

Εστω x^* ρίζα μιας αρκετά ομαλής συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ πολλ/τητας m. ΝΔΟ η ακολουθία που παράγει η μέθοδος Newton-Raphson συγκλίνει στην ρίζα x^*, για x_0 αρκετά κοντά στο x^* και μάλιστα η σύγκλιση είναι τετραγωνική (Τετραγωνική → η τάξη σύγκλισης να είναι ακριβώς 2)

ΛΥΣΗ

Εφαρμογή βασικού θεωρήματος τοπικής σύγκλισης:
Έστω $f(x)=0$ και x^* ρίζα της $f(x^*)=0$ καθώς έστω ότι $f \in C^{m+1}(I)$ [διότι η x^* έχει πολλ/τητα m]. Πρόκειται να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2}$, (1). Ενώ από Newton-Raphson γνωρίζουμε ότι: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ αλλά για ρίζα πολ/τας m είναι:

$x_{n+1} = x_n - m\cdot\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. (2).

Υπολογίζουμε:

• $x_{n+1} - x^* \overset{(2)}{=} x_n - m\cdot\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x^* =$

$= x_n - x^* - m\cdot\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} =$ (Συνεχίζουμε με Taylor)

$$= x_n - x^* - m\,\frac{\frac{(x_n-x^*)^m}{m!}\cdot f^{(m)}(x^*) + \frac{(x_n-x^*)^{m+1}}{(m+1)!}\cdot f^{(m+1)}(\xi_{n_1})}{\frac{(x_n-x^*)^{m-1}}{(m-1)!}\, f^{(m)}(x^*) + \frac{(x_n-x^*)^m}{m!}\cdot f^{(m+1)}(\xi_{n_2})} =$$

[Με μερικές απλοποιήσεις, έχουμε:]

$$= x_n - x^* - \frac{(x_n-x^*)\, f^{(m)}(x^*) + \frac{x_n-x^*}{m+1}\, f^{(m+1)}(\xi_{n_1})}{f^{(m)}(x^*) + \frac{(x_n-x^*)}{m}\, f^{(m+1)}(\xi_{n_2})} =$$

[Προσθαφαιρούμε τον όρο $\frac{1}{m}\cdot(x_n-x^*)\cdot f^{(m+1)}(\xi_{n_2})$]

$$= x_n - x^* - \frac{\frac{1}{m}(x_n-x^*)\, f^{(m+1)}(\xi_{n_2}) - \frac{1}{m}(x_n-x^*)\, f^{(m+1)}(\xi_{n_2}) + (x_n-x^*)\, f^{(m)}(x^*) + \frac{x_n-x^*}{m+1}\, f^{(m+1)}(\xi_{n_1})}{f^{(m)}(x^*) + \frac{x_n-x^*}{m}\, f^{(m+1)}(\xi_{n_2})}$$

άρα (1). $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1/m \cdot f^{(m+1)}(\xi_{n_2}) - \frac{1}{m+1}\, f^{(m+1)}(\xi_{n_1})}{f^{(m)}(x^*) + \frac{x_n-x^*}{m}\, f^{(m+1)}(\xi_{n_2})} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) f^{(m+1)}(x^*)}{f^{(m)}(x^*)} = \frac{1}{m(m+1)} \cdot \frac{f^{(m+1)}(x^*)}{f^{(m)}(x^*)}$$

για $m=1$ τότε

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}.$$

Άρα είναι τετραγωνική